LOGARITME
EEN BETEKENISVOLLE AANPAK MET HERHAALD DELEN

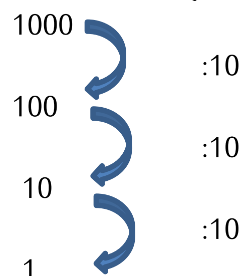
Pauline Vos
Børge Espedal

Logaritmes staan bekend als lastig onderwerp binnen het wiskundeonderwijs. Pauline Vos en Børge Espedal hebben een alternatieve aanpak voor dit onderwerp uitgeprobeerd, het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*. In dit artikel geven zij enkele principes van deze aanpak.

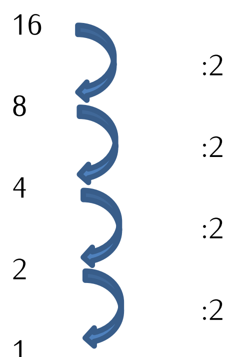
Logaritmes waren vanaf de zeventiende-eeuw belangrijk voor het versnellen van lastige berekeningen. Sinds de komst van rekenmachines is het belang van logaritmes veranderd. Ze zijn nu belangrijk als inverse van exponentiële functies, als primitieve van $1/x$ en met een logaritmische schaal kun je handig naast elkaar grote en kleine getallen weergeven. Maar leerlingen maken veel fouten met logaritmes, bijvoorbeeld omdat ze verkeerde regels gebruiken: $\log(a \cdot b) = \log a \cdot \log b$, $\log 1 = 1$ of $\log 0 = 0$. Dergelijke rekenregels onthouden leerlingen verkeerd omdat ze visueel voor de hand liggen en analoog zijn aan bijvoorbeeld de regels voor het kwadrateren: $(a{\cdot}b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $1^2 = 1$ en $0^2 = 0$. Dat leerlingen de regels niet kunnen onthouden heeft er mee te maken, dat ze aan logaritmes niet goed betekenis kunnen geven.

Herhaald delen tot je bij 1 bent

Een voorbeeld: hoe vaak kun je 1000 delen door 10 voordat je bij 1 uitkomt?
Een voorbeeld: hoe vaak kun je 1000 delen door 10 voordat je bij 1 uitkomt? Oplossing:



Je maakt drie stappen totdat je bij 1 uitkomt. Het aantal stappen, in dit geval 3, is waar het om gaat. We schrijven dit op als: ${}^{10}\log 1000 = 3$.
Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*, kun je ook met andere basisgetallen doen:



We schrijven de berekening dan op: ${}^{2}\log 16 = 4$.

De aanpak voor logaritmes als een proces met *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt* is een omkering van de aanpak voor het machtsverheffen. Zoals machtsverheffen gebaseerd is op herhaald vermenigvuldigen, is de logaritme nu gebaseerd op herhaald delen. Bovenstaande aanpak is heel laagdrempelig, want leerlingen hoeven alleen te kunnen delen en tellen. Een collega, die ons lesmateriaal in een parallelklas gebruikte, bevestigde: *'Deze methode is met name goed voor het inleiden van logaritmes, want hiermee is de overgang van bekend gebied naar onbekend gebied veel vloeiender.'*

Met het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* kunnen de leerlingen al meteen in de eerste les redeneervragen beantwoorden als:

Wat is .... en geef een reden voor je antwoord:

$^{10}\log 10^n$
$^{10}\log 10$ en $^{a}\log a$
$^{10}\log 1$ en $^{a}\log 1$
$^{10}\log 0$ en $^{a}\log 0$
$^{10}\log (-300)$ en $^{a}\log (-300)$

Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* is een wiskundige context, die een procesmatige betekenis geeft aan de logaritme. Wij testten het uit in twee 4-havo/vwo klassen[1] en zagen dat $^{10}\log 10 = 1$ en $^{10}\log 1 = 0$ ook voor zwakkere leerlingen goed toegankelijk bleek, want $^{10}\log 10$ kun je beredeneren: je hoeft vanaf 10 maar éénmaal door 10 te delen om bij 1 te komen, dus: $^{10}\log 10 = 1$. En $^{10}\log 1$ kun je analoog beredeneren, want je hoeft niet éénmaal door 10 te delen om bij 1 te komen: dus $^{10}\log 1 = 0$. Direct na de lessenserie kregen de leerlingen een toets, en ruim een maand een *retentietest*. Deze toets was vergelijkbaar met de toets van een jaar eerder. Het bleek dat méér leerlingen een correct antwoord gaven op $^{10}\log 1$, en ook dat het vervolgens minder wegzakte (p-waardes op test en retentietest voor de experimentele groep: 51% en 40%, voor de controlegroep: 36% en 21%). Doordat de leerlingen antwoord kunnen geven op het *waarom*, kunnen ze het veel beter onthouden. Ze hoeven het niet als aparte feitjes in hun hoofd te stampen, want ze kunnen het antwoord telkens reconstrueren vanuit het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt*.

Vergelijkingen met logaritmes in de eerste les

Ook de volgende (abstractere) opgaven konden we probleemloos aan het begin van de lessenserie aan de leerlingen voorleggen. Hier enkele voorbeelden:

Los op x:

a) $^{10}\log x = 18$
b) $^{10}\lg (3x - 5) = 1$
c) $^{10}\lg 1 = x^2$

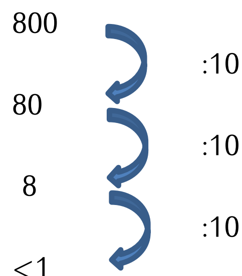
In de opgaven konden de leerlingen gebruik maken van het *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt*. Voor welk getal x heb ik 18 stappen nodig? Daarnaast konden de leerlingen de "handjes methode" gebruiken (dus dat je een deel van de expressie rondom de x bedekt).
In ons onderzoek bleek het correct oplossen van een vergelijking als $^{10}\log(2x+3)=1$ significant te verbeteren: de p-waarden voor de experimentele klassen waren: 64% (op de toets) en 35% (op de retentietoets), terwijl dit voor de controlegroep was: 38% (op de toets) en 16% (op de retentietoets).

---

[1] Er is in Noorwegen geen scheiding tussen wiskunde A of B, noch tussen havo en vwo.

Schatten van de waarde van logaritmes

Na de inleiding en de eenvoudige vergelijkingen zijn we overgegaan op het schatten van de uitkomst van een logaritme bij getallen die bij het herhaald delen niet precies op 1 uitkomen. Je kunt namelijk een aardige schatting maken, bijvoorbeeld tussen welke gehele getallen ${}^{10}\log 800$ zal liggen.Oplossing:



We bereiken 1 niet. Twee stappen is te weinig, maar drie is net teveel. Dus: $2 < {}^{10}\log 800 < 3$

We kunnen zelfs de schatting verbeteren, want de uitkomst moet dichter bij 3 dan bij 2 liggen, omdat 1 dichter bij 0,8 ligt dan bij 8. Op dit punt hebben we de rekenmachine erbij gehaald en gevonden dat: ${}^{10}\log 800 = 2{,}90$. Dus inderdaad ligt het antwoord dichter bij 3.

Van alle positieve getallen x kun je op deze manier gaan schatten waar ${}^{10}\log x$ zal liggen. De leerlingen moesten steeds eerst het interval tussen twee gehele getallen aangeven, en vervolgens schatten bij welk geheel getal het dichter zou liggen. Daarna kon er met de rekenmachine gecontroleerd worden.

Door het schatten van de logaritmewaarden consolideerden we het *herhaald-delen-door-10-totdat-je-bij-1-uitkomt*. Hierdoor gingen de leerlingen steeds beter intuïtief begrijpen dat logaritmes een functie zijn: er wordt telkens een getal gekoppeld aan een ander getal.

Volgens het Noorse curriculum hoefden we ons alleen te richten op de logaritmes met basis 10. We denken dat men ook goed kan wisselen naar andere basisgetallen en dan kunnen leerlingen beredeneren hoe groot bijvoorbeeld ${}^{2}\log 100$ zal zijn. Ook dit kan met schatten:

${}^{2}\log 100 > 6$, want ${}^{2}\log 64 = 6$. En ${}^{2}\log 64 < 7$ want ${}^{2}\log 128 = 7$. Leerlingen kunnen dan beredeneren, dat ${}^{2}\log 100$ een tikje dichter bij 7 dan bij 6 zal liggen. Voor het controleren hebben veel rekenmachines tegenwoordig ook een knop.

Redeneren met rekenregels

De aanpak met het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* geeft veel mogelijkheden tot redeneeropgaven, ook als je zoals wij alleen 10 gebruikt als basis. We vroegen de leerlingen verbanden te leggen en te generaliseren. We hebben eerst de leerlingen laten nadenken over een samenhang tussen log8, log800 en log80000. De leerlingen vonden het heel logisch, dat ${}^{10}\log 80000 = 2 + {}^{10}\log 800 = 2 + 2{,}90 = 4{,}90$. Het is gewoon een kwestie van redeneren over het aantal stappen van de herhaalde deling totdat je 1 bereikt. Vanaf 80000 moet je twee stappen meer maken dan vanaf 800. In de klas zagen we de leerlingen met hun vingers het aantal nullen bedekten om de stappen te tellen. Ze bedachten dus zelf een snellere manier dan de lange 'staartdeling' met de pijltjes, die we op het bord maakten.

De aanpak van het herhaald delen is goed te gebruiken voor het geven van betekenis aan regels zoals:

$^{10}\log(10^n \cdot a) = n + {}^{10}\log a$

$^{10}\log(a^n) = n \cdot {}^{10}\log a$

$^{\sqrt{10}}\log a = 2 \cdot {}^{10}\log a$ (want tweemaal delen door √10 is gelijk aan éénmaal delen door 10)

Bovenstaande regels zijn machtsregels rondom de logaritmes en kunnen door de leerlingen zelf beredeneerd worden. Het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* heeft echter ook beperkingen, want dat $^{10}\log 0{,}001$ een negatief getal oplevert, krijgt geen duidelijke betekenis door het herhaald delen. Ook de rekenregels voor vermenigvuldiging en deling kregen geen duidelijke betekenis. We zagen dat leerlingen hierbij toch weer vervielen in een soort "ik doe de regel, maar begrijp het niet".
Daarom adviseren we om bij de aanpak met *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* eerst de leerlingen met de machtsregel te laten redeneren, dus $^{b}\log(a^n) = n \cdot {}^{b}\log a$, en pas daarna over te gaan op regels voor vermenigvuldiging en deling, en dat logaritmes de inverse zijn van machtsverheffen.
We weten niet of de aanpak met *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* ook beter werkt dan de aanpak, die gebaseerd is op plantengroei (waarin de logaritme de tijdsfactor van de groei is).
Ook verduidelijkt de aanpak van het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* niet de relevantie van logaritmes. Waarom zou je herhaal gaan delen? We hebben daarom de lessen ook verlevendigd met illustraties van toepassingen van logaritmes (geluidsmetingen, aardbevingen, enz) en het gebruik van de logaritmische schaal. Dit werd door diverse leerlingen gewaardeerd, al waren er ook die de illustraties onnodig vonden.

Wiskundig didactische achtergronden

In het voorgaande hebben we een indruk gegeven van de opbouw van onze lessenserie. De aanpak met het *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* geeft een wiskundige context voor het inleiden van logaritmes. Binnen deze context kunnen leerlingen vanaf het begin redeneren, waardoor het een 'rijke' context is, die betekenisvol is een aanzet tot wiskundig handelen. Het geeft leerlingen de mogelijkheid om *inductief* te werken, dus door eerst praktisch, met concrete getallen stapsgewijs iets uit te zoeken, en van daaruit naar algemene regels toe te werken. We merkten ook, dat er een speels element aanzit, en dat de leerlingen het stapsgewijze proces konden ondersteunen met handgebaren. Dit kan belangrijk zijn voor sommige leerlingen, want uit neurologisch onderzoek blijkt, dat sommige leerlingen met handgebaren hun leren versterken.

Wiskundig is de aanpak te rechtvaardigen op basis van de definitie: $a = b^{{}^{b}\log a}$

die gelijkwaardig is met: $\dfrac{a}{b^{{}^{b}\log a}} = 1$

Hier staat links een quotiënt. Deze kun je interpreteren als: je begint bij a en gaat herhaald delen door b totdat het quotient gelijk is aan het rechter lid: 1. Het aantal keren dat je door b moest delen is: $^{b}\log a$.
Het is vervolgens een kleine stap om te vervolgen met: de macht waartoe je b moet verheffen om bij a te komen is dus ook: $^{b}\log a$. Daarmee kan de logaritme als *herhaald-delen-totdat-je-bij-1-uitkomt* vervolgd worden door de logaritme als inverse van de exponentiële functie: $x = b^a \Leftrightarrow a = {}^{b}\log x$.

In veel schoolmethodes wereldwijd wordt hiermee begonnen: logaritmes worden ingevoerd als inverse van de exponenten. Deze traditionele aanpak is deductief (startend vanuit een algemene regel) en leunt op het werken met symbolen. Deductief en symbolisch werken sluit goed aan op de werk- en denkwijze van veel wiskundigen, maar niet op die van veel leerlingen.

Ten slotte: in de experimenteer-klassen vroegen we drie maanden na de inleiding op logaritmes aan de leerlingen om de volgende getallen van groot naar klein te ordenen: 5, 5!, log5 en √5 (zonder rekenmachine uiteraard). Bijna alle leerlingen konden dit moeiteloos. Het betekent voor ons, dat ze log5 als iets handzaams zagen en dat ze het proces van herhaald delen goed onthouden hadden en functioneel konden inzetten om een schatting van een logaritme-waarde te maken.

Over de auteurs

Pauline Vos is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen). E-mailadres: *fpvos@hotmail.com*. Børge Espedal is wiskundedocent aan Vågsbygd Videregående Skole (Kristiansand, Noorwegen). In het kader van zijn masterstudie schreef hij hoofdstuk-vervangend lesmateriaal en voerde hij een ontwerponderzoek uit.

Verder lezen

Berezovski, T. & Zazkis, R. (2006). Logarithms: Snapshots from Two Tasks. *Proceedings of 30th International Conference for Psychology of Mathematics Education. Volume 2* (pp. 145-152). Praag: PME.
Espedal, B. (2015). *En meningsfull tilnærming til logaritmer; en designstudie om introduksjon av logaritmer gjennom repetert divisjon* [Een betekenisvolle aanpak voor logaritmes; een ontwerponderzoek naar de introductie van logaritmes dmv herhaald delen]. Master's scriptie. Kristiansand, Noorwegen: University of Agder.
Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal, 27*(1), 12-20.
Liang, C. B, & Wood, E. (2005). Working with logarithms: students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator, 8*(2), 53-70.